AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

On fixe un réel $a > 0$.

Si f est un élément de E, on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$$

L'objectif du problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) bornée sur I, puis d'étudier l'application $U : f \mapsto g$.

1. (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ et en déduire que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Posons $h(x) = e^{-ax}y(x)$. On a $h'(x) = -e^{-ax}f(x)$, donc il existe K tel que $h(x) = K - \displaystyle\int_1^x f(t)e^{-at}dt$. La réciproque est immédiate.

(b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) bornée sur I, celle-ci est unique.
Avec l'écriture précédente, en notant y_1 et y_2 deux solutions bornées, on a

$$y_i = e^{ax}\left(K_i - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right)$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Ainsi $y_1(x) - y_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$. Si $K_1 \neq K_2$, en faisant tendre $x \to +\infty$ on a une contradiction avec le caractère borné.

(c) Vérifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.
$|f|$ étant bornée par un réel M, et $a > 0$, on a $0 \leq |f(t)|e^{-at} \leq Me^{-at}$. Le théorème usuel de comparaison permet de conclure.

(d) Montrer que $g : x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_f) bornée sur I.

Soit g l'unique solution bornée. Il existe K tel que $g(x) = e^{ax}\left(K - \displaystyle\int_1^x e^{-at}f(t)dt\right)$. En faisant tendre $x \to +\infty$, l'unique valeur de K ne conduisant pas à une limite infinie est $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$. Il reste à vérifier que cette quantité est effectivement bornée (en majorant $|f|$ par M dans l'intégrale par exemple).

Dans la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

Un calcul évident donne $U(1) = \dfrac{1}{a}$.

(b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

U est clairement linéaire et à valeurs dans E, d'après l'expression intégrale en 1.d.

(c) U est-il injectif ?

Oui, en étudiant le noyau : si $g = U(f) = 0$, alors l'intégrale est nulle pour tout x. Donc f est nulle.

(d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$.

On procède par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties, en écrivant

$$U^{n+1}(f)(x) = U^n(U(f))(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}U(f)(t)\mathrm{d}t.$$

La dérivée de $e^{-at}U(f)(t)$ est $-ae^{-at}U(f)(t) + e^{-at}(aU(f)(t) - f(t)) = -e^{-at}f(t)$ et on primitive $\dfrac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$. Les termes intégraux de l'intégration par parties

$$\left[\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}f(t)\right]_x^{+\infty}$$

sont nuls en $t = x$ et en $t = +\infty$ par le caractère borné de f.

3. (a) Pour k un nombre réel positif, et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

Un calcul évident donne $U(f_k) = \dfrac{1}{a+k}f_k$.

(b) En déduire que pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

$k \mapsto \dfrac{1}{a+k}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, \frac{1}{a}]$. Donc pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$ il existe un $k \geq 0$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{a+k}$. On conclut avec la question précédente : $U(f_k) = \lambda f_k$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter $U^n(f_k)$. En déduire pour $x \in I$: $\lim\limits_{n\to+\infty}[U^n(f_k)](x)$

Immédiatement par récurrence on obtient $U^n(f_k) = \dfrac{1}{(a+k)^n}f_k$. Pour $x \in I$ fixé, la limite est donc nulle quand $n \to +\infty$ car f_k est bornée.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction de E définie par : $\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$. On note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

   (a) Pour $n \geq 1$, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.
   A l'aide d'une intégration par parties,
   $$\psi_n(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}t^n e^{-t}\mathrm{d}t = e^{ax}\left[\frac{-1}{a+1}e^{-at}t^n e^{-t}\right]_x^{+\infty} + \frac{n}{a+1}e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
   Toutes les intégrales étant convergentes, il vient :
   $$\psi_n(x) = \frac{1}{a+1}(\varphi_n(x) + n\psi_{n-1}(x)).$$

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel F_p de E engendré par $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$.
   On montre la stabilité par récurrence sur p grâce à la question précédente : c'est immédiat pour $p = 0$. Et comme ψ_p est combinaison linéaire de φ_p et de ψ_{p-1}, il appartient à $Vect(\varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1})$.
   De plus, la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ est libre : on utilise pour cela la liberté d'une famille de polynômes échelonnée en degrés.

   (c) On prend ici $p = 2$. Ecrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme U restreint à F_2.
   On a $\psi_0 = T_2(\varphi_0) = \dfrac{1}{1+a}\varphi_0$, $\psi_1 = T_2(\varphi_1) = \dfrac{1}{a+1}\varphi_1 + \dfrac{1}{(a+1)^2}\varphi_0$ et $\psi_2 = T_2(\varphi_2) = \dfrac{1}{a+1}\varphi_2 + \dfrac{2}{a+1}\psi_1 = \dfrac{1}{a+1}\varphi_2 + \dfrac{2}{a+1}\left(\dfrac{1}{a+1}\varphi_1 + \dfrac{1}{(a+1)^2}\varphi_0\right)$. Il vient :
   $$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.
   Immédiat avec la question 1.d. par inégalité triangulaire (toutes les intégrales convergent).

   (b) On suppose que φ appartient à E et est à valeurs positives. Montrer que $\psi = U(\varphi)$ est à valeurs positives.
   Immédiat par positivité de l'intégrale.

   (c) Si de plus φ est décroissante, montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.
   Si φ décroit, alors $\psi(x) \leq \varphi(x)e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}dt$. D'où $a\psi(x) \leq \varphi(x)$. Ainsi, comme $\psi'(x) = a\psi(x) - \varphi(x)$, il vient $\psi'(x) \leq 0$, donc ψ décroit.

6. On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) : f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'application qui à $f \in E_1$ associe f' .

(a) Pour $f \in E_1$, montrer que $aU(f) = f + U(f')$.
Une intégration par parties donne le résultat (toutes les intégrales étant convergentes).

$$U(f') = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f'(t)\mathrm{d}t = e^{ax} \left[e^{-at} f(t)\right]_x^{+\infty} + ae^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que pour tout $f \in E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.
On remarque que $U(f') = U(D(f))$ et $D(U(f))$ sont toutes deux égales à $aU(f) - f$ (d'après l'équation différentielle initiale).

7. Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives, tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $g = U(f)$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$.

(a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.
Avec $G'(x) = g(x)$ et à partir de l'équation différentielle initiale qui fournit l'égalité :

$$g'(t) - ag(t) + f(t) = 0$$

on a le résultat en l'intégrant entre 1 et x. Toutes les intégrales sont convergentes car f, g et g' sont bornées.

(b) Justifier que la fonction F est un élément de E, et montrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = Ce^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$$

f étant à valeurs positives, on a pour tout $x \in I : 0 \leq F(x) \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Donc F est continue comme primitive de f et bornée.
En utilisant la première question, comme G est solution de

$$G' - aG + (F - g(1)) = 0$$

il existe deux réels K_F et K_G tels que :

$$\begin{aligned}
G(x) &= e^{ax}\left(K_G - \int_1^x e^{-at}(F(t) - g(1))\mathrm{d}t\right) \\
&= (K_G - K_F)e^{ax} + e^{ax}\left(K_F - \int_1^x e^{-at}F(t)\mathrm{d}t\right) + e^{ax}\int_1^x e^{-at}g(1)\mathrm{d}t \\
&= (K_G - K_F)e^{ax} + [U(F)](x) + g(1)e^{ax}\frac{e^{-ax} - e^{-a}}{-a} \\
&= \left(K_G - K_F + \frac{g(1)e^{-a}}{a}\right)e^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.
\end{aligned}$$

On a donc $C = K_G - K_F + \dfrac{g(1)e^{-a}}{a}$.

(c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

On a la relation $-aG(x) = -F(x) - g(x) + g(1)$. Comme F et g sont bornées, pour $x \geq 1$, $\dfrac{F(x) + g(x) - g(1)}{ax}$ est bornée.

(d) En déduire que $C = 0$ et que $G = U(F) - \dfrac{g(1)}{a}$.

La seule valeur possible de C ne conduisant pas à une limite infinie dans la décomposition de la question 7.b est $C = 0$.

(e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

F étant bornée, $U(F)$ aussi. Par conséquent G est bornée, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$ est donc bornée. Comme c'est l'intégrale d'une fonction positive, elle est croissante bornée donc convergente quand $x \to +\infty$.

2 Problème d'algèbre

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel supérieur ou égal à 1, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On peut définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$f_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & Mx \end{array}$$

On note $\mathrm{Ker}(f_M)$ et $\mathrm{Im}(f_M)$ respectivement le noyau et l'image de f_M. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Le problème est constitué de deux parties qui pourront être traitées de manière indépendante.

2.1 Première partie

Si λ est une valeur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note E_λ le sous-espace propre de $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ, c'est-à-dire le noyau de l'endormorphisme associé à la matrice $M - \lambda I_n$ noté $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$ où I_n est la matrice identité d'ordre n. Ainsi

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n : Mx = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n).$$

On note alors $\sigma(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. Et $\rho(M)$ le rayon spectral de M, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M.

1. Dans cette question, on pose $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
C'est une fonction polynomiale en les coordonnées.

(b) La fonction gradient de F est notée ∇F. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^2$, $\nabla F(y) = Ay - b$.
Comme A est symétrique, on a $\langle Ax, h\rangle = \langle Ah, x\rangle$, d'où

$$F(x+h) - F(x) - \langle \nabla F(x), h\rangle = \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$$

qui est bien une fonction $o(h)$.

(c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
Si F admet un point critique y alors $\nabla F(y) = 0$. Or A est inversible, donc l'unique solution est $y = A^{-1}b = (1, 1)$.

(d) Écrire le développement limité de F en ce point critique.
Comme F est quadratique, le développement limité s'arrête à l'ordre 2. Avec HF la matrice Hessienne de F, on a donc

$$\begin{aligned} F(x) &= F(y) + \langle \nabla F(y), x-y\rangle + \frac{1}{2}\langle x-y, HF(y)(x-y)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle b, y\rangle - \langle b, y\rangle + 0 + \frac{1}{2}\langle x-y, A(x-y)\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\langle b, y\rangle + 0 + \frac{1}{2}\langle x-y, A(x-y)\rangle \\ &= -\frac{1}{2}(b_1+b_2) + (x_1-1)^2 + \frac{5}{2}(x_2-1)^2 - (x_1-1)(x_2-1). \end{aligned}$$

(e) En déduire que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

$$\begin{aligned} F(x) + \frac{1}{2}\langle b, y\rangle &= (x_1-y_1)^2 - (x_1-y_1)(x_2-y_2) + \frac{5}{2}(x_2-y_2)^2 \\ &= (x_1 - y_1 - \frac{1}{2}(x_2-y_2))^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)(x_2-y_2)^2 \\ &= (x_1 - y_1 - \frac{1}{2}(x_2-y_2))^2 + \frac{9}{4}(x_2-y_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc le minimum de F est atteint quand $x_2 = y_2 = 1$ et $x_1 = y_1 = 1$. et $F(1,1) = -5/2$

Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$. On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif, i.e. pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.

2. (a) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \sigma(M)$ alors $0 \leq \langle Mx, x\rangle = \lambda\|x\|^2$ montre que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $]0, +\infty[$.
Soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \sigma(M)$ alors $0 < \langle Mx, x\rangle = \lambda\|x\|^2$ montre que $\lambda \in]0, +\infty[$.

3. On suppose dans cette question que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, que c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad G(x) = \frac{1}{2}\langle Mx, x\rangle - \langle c, x\rangle.$$

   (a) Prouver que, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\langle Mx, h\rangle = \langle Mh, x\rangle$.
$\langle Mx, h\rangle = (Mx)^T h = x^T M^T h = x^T Mh = \langle x, Mh\rangle = \langle Mh, x\rangle$.

   (b) On pose $\nabla G(y) = My - c$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donner la forme de la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad G(x + h) = G(x) + \langle \nabla G(x), h\rangle + R(h).$$

$R(h) = \frac{1}{2}\langle Mh, h\rangle$.

   (c) On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En observant que $G(x_0 + th) \geq G(x_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\nabla G(x_0) = 0$.
$0 \leq \langle \nabla G(x_0), th\rangle + R(th) = t\langle \nabla G(x_0), h\rangle + t^2 R(h)$ est un polynôme de degré 2 en la variable t. Cela impose que le coefficient devant t est nul.

4. On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive.

   (a) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} G(x)$, et le déterminer en fonction de M et c.
S'il existe un minimum x_0 alors il vérifie l'hypothèse de la question (c) d'où $\nabla G(x_0) = 0$. Puisque M est définie positive alors R est une fonction positive qui ne s'annule qu'en $h = 0$. Ainsi $G(x) = G(x_0) + R(x_0 - x) > G(x_0)$ pour tout $x \neq x_0$ d'où l'unicité. Pour l'existence, il suffit de voir que $x_0 = M^{-1}c$ vérifie l'yhpothèse $\nabla G(x_0) = 0$ et en utilisant encore $G(x) = G(x_0) + R(x_0 - x) > G(x_0)$, on a bien la relation $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ avec d non nul. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $G(v - rd) = \inf_{s \in \mathbb{R}} G(v - sd)$.
$G(v - sd) = G(v) - s\langle \nabla G(v), d\rangle + s^2 R(d)$. Donc c'est un polynôme de degré 2 en la variable s de coefficient dominant positif $R(d)$ non nul. Il admet donc un unique minimum.

   (c) Exprimer r en fonction de v, d, M et c.
C'est évidemment $r = \frac{\langle \nabla G(v), d\rangle}{2R(d)} = \frac{\langle Mv - c, d\rangle}{\langle Md, d\rangle}$. Le dénominateur est non nul car M est définie positive de d est non nul.

2.2 Deuxième partie

On note $L(\mathbb{K}^n)$ l'ensembles des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$. On note P_f le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in Ł(\mathbb{K}^n)$. Un endomorphisme $f \in L(\mathbb{K}^n)$ est dit cyclique s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de $\mathbb{K}^n$ de cardinal p, stable par f , c'est à dire :
— C_a^p est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$,
— C_a^p possède p éléments deux à deux distincts,
— $f(C_a^p) \subset C_a^p$.
Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f au point a et on dit que f est cyclique d'ordre p.

5. (a) Pour quel(s) entier(s) $n \in \mathbb{N}$ non nul, un projecteur h de $L(\mathbb{K}^n)$ peut-il être cyclique ?
Soit h un projecteur alors pour tout $a \in \mathbb{K}^n$, $h(h(a)) = h(a)$. Donc la famille C_a^p ne peut posséder p éléments distincts que si $p \leq 2$. Donc $\mathbb{K}^n$ doit être de dimension 1 ou 2. Le cas de la dimension 0 est exclu car n et p sont des entiers naturels non nuls. La dimension 1 est triviale, car tout élément a non nul forme un cycle car $h(a) = a$ lorsque h est un projecteur non nul. La dimension 2 est possible s'il existe $a \in \mathbb{K}^n$ non colinéaire à $h(a) \neq 0$ afin d'assurer le caractère générateur de la famille. On pose F le noyau de h et G son sous-espace stable, alors pour tout $(f, g) \in F \times G$ non nuls on a

$$G \ni g = h(g) + h(f) = h(g + f) \neq g + f \in G + F.$$

Donc $a := f + g$ et $h(a)$ ne sont pas colinéaires et $h(a) \neq 0$.

(b) Comment s'écrit alors un cycle de h ?
Un cycle de h s'écrit alors $\{a\}$ en dimension 1 ou $\{a, h(a)\}$ en dimension 2.

6. On considère $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f.
Prenons $a = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-1}}) = e_1 \in \mathbb{K}^n$ alors $f(a) = (0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-2}}) = e_2$ et par récurrence sur p on a $f^{p-1}(a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{p-1}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{n-p}}) = e_p$. Donc les éléments d'un cycle de taille p sont distincts deux à deux dès que $p \leq n$. De plus il est clair que la famille C_a^p est génératrice quand $p = n$, car on a construit les n éléments de la base canonique. La stabilité $f(C_a^n) \subset C_a^n$ est assurée par $f(f^{n-1}(a)) = f(e_n) = e_n = f^{n-1}(a)$.

(b) Déterminer le rang de f.

L'image de f est au moins composée de $(e_2, \dots, e_n)$ donc le rang de f est au moins $n-1$. On a une ligne nulle dans la matrice de f donc son rang est au plus $n-1$. D'où $\mathrm{rg\ f = n - 1}$.

(c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de f est calculable assez trivialement par récurrence, c'est $(-X)^{n-1}(1-X)$. Donc la valeur propre 0 est de multiplicité $n-1$. Mais un élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ du noyau de f est tel que

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i e_{i+1} + \lambda_{n-1} e_n + \lambda_n e_n$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$ et $\lambda_{n-1} = -\lambda_n$. Donc le noyau de f est de dimension 1, ce qui est une contradiction avec la diagonalisibilité dès que $n-1 \neq 1$ i.e. $n \neq 2$. Si $n = 2$ ($n = 1$ est exclu par l'énoncé), f vérifie $f(e_1 - e_2) = e_2 - e_2 = 0$ et $f(e_2) = e_2$ qui est donc diagonal dans la base $(e_1 - e_2, e_2)$ de valeurs propres 0 et 1.

7. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ cyclique d'ordre p.

(a) Justifier que $p \geq n$.

Pour qu'une famille de cardinal p soit génératrice de $\mathbb{K}^n$ il faut $p \geq n$.

(b) Montrer que f est au moins de rang $n-1$.

Soit p tel que C_a^p soit un cycle, alors $C_a^p \subset Vect(\mathrm{Im(f)}, \{\mathrm{a}\})$. Donc $\mathbb{K}^n = Vect(C_a^p) \subset Vect(\mathrm{Im(f)}) + \mathrm{Vect}(\{\mathrm{a}\})$. Ceci impose que la dimension de Im(f) est au moins $n-1$ d'où l'inégalité sur le rang.

8. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f. Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), ..., f^{m-1}(a))$ soit libre.

(a) Prouver que $\forall k \geq m,\ f^k(a) \in Vect(\mathcal{F})$.

La famille $(a, f(a), ..., f^m(a))$ n'est pas libre donc il existe une combinaison linéaire non triviale telle que $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(a) = 0$. Clairement λ_m ne peut pas être nul sinon, cela contredit le caractère libre de $\mathcal{F}$. Donc $f^m(a) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(a) \in Vect(\mathcal{F})$. Par récurrence, supposons la propriété vraie jusqu'au rang k. Alors $f^{k+1}(a) = f(f^k(a))$ donc il existe une combinaison linéaire telle que

$$\begin{aligned}
f^{k+1}(a) &= f\left(\sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(a)\right) = \sum_{i=0}^{m-2} \mu_i f^{i+1}(a) + \mu_{m-1} f^m(a) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(a) - \mu_{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(a) \\
&= -\mu_{m-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} a + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\mu_{i-1} - \mu_{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right) f^i(a) \in Vect(\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

(b) En déduire que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
Si $p \leq m$ alors $\mathcal{F}$ est libre et génératrice car elle contient C_a^p. Donc c'est une base. Si $m \leq p$, par la question (a), on a montré que $Vect(\mathcal{F})$ est stable par f, alors $Vect(\mathcal{F}) = Vect(C_a^p) = \mathbb{K}^n$. La famille C_a^m est libre et génératrice, donc c'est bien une base. A fortiori on a bien $m = n$.

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f. Déterminer les valeurs (si elles existent) de x et y pour que f soit cyclique d'ordre 2.
On cherche $a = (a_1, a_2)$ tel que $\{(a_1, a_2), b := (xa_2, a_1 + ya_2)\}$ soit un cycle. Déjà la stabilité $f(b) = (xa_1 + xya_2, xa_2 + ya_1 + y^2 a_2)$. Mais 1 n'est pas valeur propre donc $f(b) \neq b$. Ceci impose $f(b) = a$ d'où $xa_1 + xya_2 = a_1$ et $xa_2 + ya_1 + y^2 a_2 = a_2$. On obtient un système linéaire en $(x - 1, y)$ et en (a_1, a_2).

$$\begin{pmatrix} x-1 & xy \\ y & x-1+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & xa_2 \\ a_2 & a_1 + ya_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Si $y = 0$ alors le système donne trivialement $x = 1$ car $a \neq 0$. Or $x = 1$ est exclu car alors 1 serait valeur propre. Comme la famille doit être génératrice et libre, alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & xa_2 \\ a_2 & a_1 + ya_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

La matrice est donc inversible et les seules solutions du système sont $x = 1$ et $y = 0$. Il n'y a donc aucun endomorphisme cyclique de cette forme. Ceci impose en particulier que tout endomorphisme cyclique de cette forme admet 1 comme valeur propre. D'où une équation pour x qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-y \\ 1 & y \end{pmatrix}.$$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un polynôme *P* de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que *P(A)=0.*

   On vérifie que $P(A) = A^2 + A - 2I = 0$ (Cayley-Hamilton), en calculant $Det(A - \lambda I)$

2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

   Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est un polynôme de degré 1.

   $X^n = (X^2 + X - 2I)Q(X) + aX + b$

   Pour *X*=1, on obtient *a*+*b*=1

   Pour *X*=-2, on obtient $(-2)^n = -2a + b$

   En conclusion : $a = \dfrac{1-(-2)^n}{3}; b = \dfrac{2+(-2)^n}{3}$

3. Pour *n* entier strictement positif, calculer A^n et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On a : $A^n = (A^2 + A - 2I)Q(A) + aA + bI$ et $A^2 + A - 2I = 0$, donc

$$A^n = aA + bI = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}$$

La résolution du système donne $U_n = A^n U_0$ et plus précisément

$$\begin{cases} x_n = b-a = \frac{1}{3}(1+(-1)^n 2^{n+1}) \\ y_n = 3a-b = \frac{1}{3}(1-(-1)^n 2^{n+2}) \\ z_n = b-a = \frac{1}{3}(1+(-1)^n 2^{n+1}) \end{cases}$$

Exercice n° 2

Soit $f :]0,+\infty[\to R$ définie par : $f(x) = x^{-5}\left(e^{1/x} - 1\right)^{-1}$

1. Calculer la limite de *f* en zéro et en plus l'infini. Montrer que *f* admet un maximum.
   $\underset{x\to 0^+}{Lim}\ f(t) = \underset{x\to+\infty}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$, et $\underset{t\to+\infty}{Lim}\ f(t) = \underset{x\to 0^+}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = \underset{x\to 0^+}{Lim} \frac{5x^4}{e^x} = 0$, d'après la règle de l'Hôpital. Du fait des limites précédentes, de la continuité et de la positivité de *f*, elle admet un maximum.

2. Soit $x_0 = Arg\max(f)$, montrer que $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

   f est dérivable, donc si x_0 réalise un maximum pour f, on doit avoir :

$$f'(x_0) = -5x_0^{-6}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-1} + x_0^{-5}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2} e^{\frac{1}{x_0}} x_0^{-2} = -x_0^{-7}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2}\left(5x_0\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x_0}}\right)$$

   Donc $f'(x_0) = 0$ si et seulement si $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

3. Soit $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$. Montrer que l'équation $5x\ (e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, $x>0$ est équivalente à $g(t) = t$, où *t* est strictement positif.
   On pose $x = \frac{1}{t}$ et l'équation $5x\ (e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$ est équivalente à $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right) = t$

4. Montrer qu'il existe une unique solution α de l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4,5]$

On a $g'(t) = 5(e^{-t}) > 0$, donc g est strictement croissante. Puis $g(4) \cong 4{,}90 > 4$; $g(5) \cong 4{,}96 < 5$. Ainsi $g([4,5]) \subset [4,5]$ et $\underset{[4,5]}{Sup}\, g'(t) = 5e^{-4} < 1$, on a donc une contraction et d'après le théorème du point fixe , il existe une unique solution à l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4,5]$.

Pour $t < \ln 5$, $g'(t) < 1$, alors la fonction $g(t) - t$ est strictement croissante pour $t < \ln 5$
Comme $g(0) = 0$, on a : $g(t) > t$ pour $t < \ln 5$
Pour $t > \ln 5$, la fonction $g(t) - t$ est strictement décroissante, donc elle admet au plus une racine qui doit être celle trouvée à la question précédente dans l'intervalle $[4,5]$.
On peut aussi étudier directement $h(t) = g(t) - t$

5. Déduire que f possède un unique maximum.

   On sait que f possède un maximum et qu'il est unique d'après la question précédente : $x_0 = \dfrac{1}{\alpha}$

Exercice n° 3

On considère *A* et *B* deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre *n* (entier strictement positif)

1. Montrer que la matrice *AB-BA* n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

   On vérifie que *AB-BA* est une matrice antisymétrique. Posons *C=AB-BA*. Cette matrice est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Si λ est une valeur propre complexe et *u* un vecteur propre associé, on a : $Cu = \lambda u$.

   D'où $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \lambda \|u\|^2$ et $\overline{u}^{'} C' u = -\lambda \|u\|^2$ (i).

   Par ailleurs, $(Cu)' = (\lambda u)' = u'C' = \lambda u'$ et $\overline{u}^{'} C' = \overline{\lambda}\, \overline{u}^{'}$, puis en multipliant par *u* à droite, on obtient : $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \overline{\lambda} \|u\|^2$ (ii)

   En comparant (i) et (ii), on trouve $\overline{\lambda} = -\lambda$ et les valeurs propres sont des imaginaires purs.

2. On suppose de plus que *A* et *B* sont définies positives, étudier le signe de *Tr(AB)*, où *Tr* désigne la trace de la matrice.

   Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à *A* et orthogonale pour la forme hermitienne associée à *B*. Soit *P* la matrice de passage associée à cette base, alors $A = \overline{P}^{'} P$ et $B = \overline{P}^{'} DP$, où D est la matrice diagonale à coefficients strictement positifs (d_{ij}). Notons $d = Inf\,(d_{ij})$, on a :

$$Tr(AB) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} DP) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} PD) \geq d\, Tr(A^2)$$

Si $A=(a_{ij})$, comme elle est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum(a_{ij})^2>0$, car sinon on aurait A=0, donc $Tr(AB)>0$

3. Soit M une matrice carrée antisymétrique réelle. Montrer que I+M est inversible et déterminer la nature de la matrice $(I-M)(I+M)^{-1}$

   Supposons que I+M ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que $(I+M)u=0$, d'où $Mu=-u$. Par transposition, $u^{'}M^{'}=-u^{'}$ et $u^{'}M^{'}u=-\|u\|^2$

   D'autre part, la matrice étant antisymétrique, $M^{'}u=u$ et $u^{'}M^{'}u=\|u\|^2$, on obtient alors $\|u\|^2=-\|u\|^2$ et u =0, ce qui conduit à une contradiction.

   La matrice $D=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après ce qui précède.

   D est orthogonale si et seulement si $D^{'}=D^{-1}$. On obtient :

   $D^{'}=(I-M)^{-1}(I+M)\ et\ D^{-1}=(I+M)(I-M)^{-1}$.

   On a l'égalité si $(I-M)^{-1}M=M(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de l'égalité $(I-M)M=M(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que I-M est inversible. La matrice D est donc orthogonale.

Exercice n° 4

On considère les suites (u_n) et (λ_n) définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1}=\frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1=0$ et $\lambda_1=2$, il existe deux autres suites (θ_n) et (α_n) telles que pour tout entier n strictement positif, on a :

   $u_n=\cos(\theta_n);\ \lambda_n=\alpha_n\sin(\theta_n);\ 0\le\theta_n\le\pi/2$. Montrer que la suite (λ_n) est convergente, on précisera sa limite.

   Montrons par récurrence sur n, la propriété :

   $P(n): u_n$ et λ_n existent et valent $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);\ \lambda_n=2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

   La propriété est vraie pour n=1.

Comme u_n est positif, u_{n+1}existe et vaut $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Et $\lambda_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)} = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

On pose alors $\theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$; $\alpha_n = 2^n$.

$$\underset{n}{Lim}\,\lambda_n = \underset{n}{Lim}\,2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \underset{n}{Lim}\,2^n\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi$$

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

   $|\pi - \lambda_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$. En déduire un entier *N* tel que : $|\pi - \lambda_N| \leq 10^{-6}$

   Rappelons que : $|\sin^{(2p+1)}(x)| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2*p*+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et *x* donne :

   $$\left|\sin(x) - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

   En particulier pour *p*=0 et $x = \dfrac{\pi}{2^n}$, on en déduit :

   $|\pi - \lambda_n| = 2^n \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) - \dfrac{\pi}{2^n}\right| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 8^n}$ et on peut prendre *N*=8 (en passant au logarithme), car $\dfrac{\pi^3}{6\times 8^N} \leq 10^{-6}$

Exercice n° 5

On considère l'espace vectoriel R^4 rapporté à une base orthonormée *B*. On désigne par (x, y, z, t) les composantes d'un vecteur dans cette base. Soit f l'endomorphisme de R^4, associé, dans la base *B*, à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image de *f*.

   Soit $B = (e_1, e_2, e_{3,} e_4)$. On constate que $f(e_2) = f(e_4); f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$, donc l'image de *f* est engendrée par les deux vecteurs $f(e_2), f(e_1)$ qui forment une base.

2. La matrice *M* est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale semblable.

   $\det(M - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda - 11) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0(\text{double}); 2 + \sqrt{15}; 2 - \sqrt{15}$.

   La matrice *M* est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.

   Résolvons $Mu = 0$. On obtient que ce sous espace est engendré par les deux vecteurs indépendants : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), donc *M* est diagonalisable

   On peut aussi remarquer que la matrice est symétrique donc diagonalisable.

   La matrice diagonale semblable s'écrit : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\sqrt{15} \end{pmatrix}$

3. Déterminer le rang de la forme quadratique définie sur R^4 par :

   $q(x, y, z, t) = 4z^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4zt$

   Cette forme quadratique est associée à la matrice *M*, donc son rang est égal à 2.

4. On considère le système d'équations :

   $y + z + t = 1; x + 2z = m^2 + 1; x + 2y + 4z + 2t = p + 2; x + (m-1)y + 2z = 2$, où *m* et *p* sont des paramètres réels.

   - Résoudre le système homogène associé

   Soit *A* la matrice su système.

   Si *m*=1, alors *A*=*M* et les solutions du système homogène correspondent au noyau de *f* ou encore au sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), Si $m \neq 1$,*f* est bijective et l'ensemble des solutions se réduit au vecteur nul.

- Discuter l'existence de solutions de ce système en fonction de *m* et *p*.

Si $m \neq 1$,*f* est bijective et il existe une solution unique.

Si *m*=1, il existe un sous espace affine de solutions si et seulement si $(1, 2, p+2; 2) \in \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f$ est caractérisée par : T=Y et Z=2X+Y, ceci donne : *p*+2=2+2, soit *p*=2.

Exercice n° 6

Soient f et g deux applications numériques définies sur $]0, +\infty[$, où *f* est convexe et *g* affine. On suppose que :

(1) $\forall x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et
(2) $f(1) = g(1)$
Comparer *f* et *g*.

On suppose que $f \neq g$. Alors $\exists\, y > 0, y \neq 1, f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme *g* est une fonction affine, $g(y) = ay + b$ et comme *f* est convexe :
$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)\, f(1) < \alpha\, g(y) + (1-\alpha)(a+b), \alpha \in [0,1[$
Et pour $\alpha = 1$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction et les deux fonctions sont égales.